Apellidos y nombre

Temas 10 y 11: Funciones elementales. Límites y continuidad MAT I 1 C

1. Averigua cuál es el dominio de definición de las siguientes funciones –elegir una de ellas–

$a)\ f(x)=\sqrt{x^2-6x+8} \quad b)\ y=\sqrt{\dfrac{x+1}{x-2}}$

a) f(x):

$x^2-6x+8=0;\ x=\begin{cases}2\\4\end{cases}$

+   −   +

2   4

$x=0;\ 0^2-6\cdot0+8=8>0$

$x=3;\ 3^2-6\cdot3+8=-1<0$

$x=5;\ 5^2-6\cdot5+8=3>0$

$\boxed{D=(-\infty,2]\cup[4,+\infty)}$

b) $x+1=0;\ x=-1$

$x-2=0;\ x=2$

+   −   +

−1   2

$x=-2;\ \dfrac{-2+1}{-2-2}=\dfrac{-}{-}=+$ | $x=3\ \dfrac{3+1}{3-2}=\dfrac{+}{+}=+$

$x=0;\ \dfrac{0+1}{0-2}=\dfrac{+}{-}=-$

$\boxed{D=(-\infty,-1]\cup(2,+\infty)}$

Apellidos y nombre

2. Estudiar la continuidad de la función siguiente diciendo de qué tipo es cada discontinuidad:

$$f(x)=\begin{cases} x+3 & x<0 \\ \dfrac{x}{8} & 0\le x\le 2 \\ \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4} & 2<x \end{cases}$$

En $x=0$:

$f(0)=\frac{0}{8}=0$

$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} x+3=0+3=3$

$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{8}=\frac{0}{8}=0$

$\boxed{\text{Es discontinua en } x=0 \text{ de salto finito.}}$

En $x=2$

$f(2)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$

$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\frac{x}{8}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$

$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-3x+2}{x^2-4}=\frac{2^2-3\,2+2}{2^2-4}=\frac{0}{0}$ IND

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & -3 & 2 \\ 2 & & 2 & -2 \\ \hline & 1 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 0 & -4 \\ 2 & & 2 & 4 \\ \hline & 1 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

$\lim_{x\to 2^+}\frac{\cancel{(x-2)}(x-1)}{\cancel{(x-2)}(x+2)}=\frac{2-1}{2+2}=\frac{1}{4}$

$\boxed{\text{Es cont. en } x=2}$

Apellidos y nombre

3. Representa la siguiente función razonadamente: $y=\left|1-\frac{x^2}{4}\right|$. Exprésala como función a trozos.

$$y=\left|1-\frac{x^2}{4}\right|$$

Vértice: $x=\frac{-b}{2a}=\frac{-0}{2\cdot\frac{1}{4}}=\frac{-0}{\frac{1}{2}}=0$

Corte ejes: $1-\frac{x^2}{4}=0$; $4-x^2=0$; $x=\pm 2$

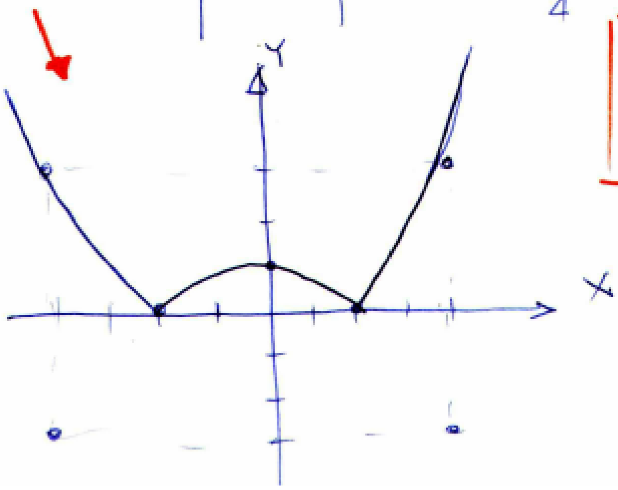
Tabla:

x	f(x)	|f(x)|
0	1	1
2	0	0
−2	0	0
4	−3	+3
−4	−3	3

$1-\frac{0^2}{4}=1$

$1-\frac{4^2}{4}=1-4=-3$

$1-\frac{(-4)^2}{4}=1-4=-3$



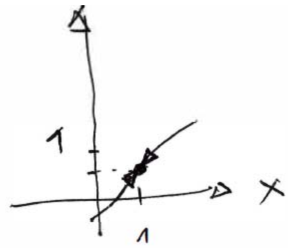
$$\left|1-\frac{x^2}{4}\right|=\begin{cases}-1+\frac{x^2}{4} & \text{si } x\leq -2\\ 1-\frac{x^2}{4} & \text{si } -2<x<2\\ -1+\frac{x^2}{4} & \text{si } 2<x\end{cases}$$

Apellidos y nombre

4. Calcula los siguientes límites, explica lo que significan y representa gráficamente los resultados que obtengas:

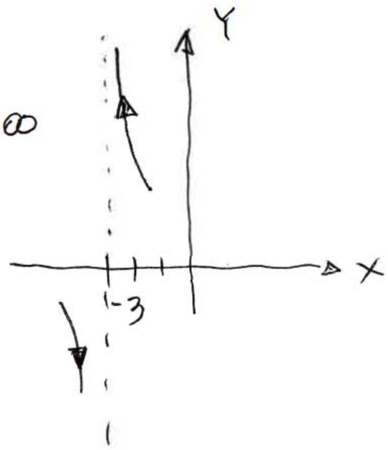
$$a)\ \lim_{x\to 1}\frac{1}{x^2+1}\ ;\ b)\ \lim_{x\to -3}\frac{x+5}{x+3}\ ;\ c)\ \lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{x^2-1}$$

a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x^2+1}=\frac{1}{1^2+1}=\frac{1}{2}$



Punto de continuidad

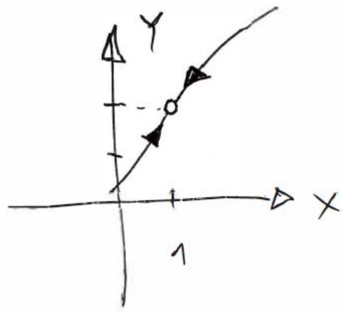
b) $\lim\limits_{x\to -3^{\pm}}\frac{x+5}{x+3}=\frac{-3+5}{-3+3}=\frac{2}{0^{+}}=\pm\infty$



Asíntota vertical en x=-3

c) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{x^2-1}=\frac{0}{0}$ IND

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(\ \ +3)}{\cancel{(x-1)}(x+1)}=\frac{4}{2}=2$



Discontinuidad falta el punto.

Apellidos y nombre

5. Dadas las funciones siguientes realiza las operaciones que se indican. Simplifica las expresiones lo que sea posible.

$$f(x)=2x+1;\; g(x)=x^2-3;\; h(x)=\frac{x-5}{2x};\; p(x)=\frac{5x-1}{2x+4}$$

a) (f – h)(x); b) (g · h)(x); c) (p : h)(x); d) (g ∘ f)(x); e) $p^{-1}(x)$

a) $f(x)-h(x)=2x+1-\frac{x-5}{2x}=\frac{2x(2x+1)-(x-5)}{2x}=\frac{4x^2+2x-x+5}{2x}=\boxed{\frac{4x^2+x+5}{2x}}$

b) $g(x)\cdot h(x)=(x^2-3)\cdot\frac{x-5}{2x}=\frac{(x^2-3)(x-5)}{2x}=\boxed{\frac{x^3-5x^2-3x+15}{2x}}$

c) $p(x):h(x)=\frac{\frac{5x-1}{2x+4}}{\frac{x-5}{2x}}=\frac{(5x-1)2x}{(2x+4)(x-5)}=\frac{10x^2-2x}{2x^2-10x+4x-20}=\boxed{\frac{10x^2-2x}{2x^2-6x-20}}$

d) $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2x+1)=(2x+1)^2-3=$
$=4x^2+4x+1-3=\boxed{4x^2+4x-2}$

e) $p^{-1}(x)$;

$x=\frac{5y-1}{2y+4}$; $(2y+4)\cdot x=5y-1$;

$2xy+4x=5y-1$; $2xy-5y=-4x-1$

$(2x-5)y=-4x-1$; $y=\frac{-4x-1}{2x-5}=\boxed{\frac{4x+1}{-2x+5}}$

Apellidos y nombre

6. Hallar asíntotas, posición de la función respecto de las asíntotas, cortes con los ejes y esbozo de la gráfica: $f(x)=\dfrac{2x^2+4x+2}{x^2+2x-3}$

A.V.

$x^2+2x-3=0$; $x=\dfrac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot1\cdot(-3)}}{2\cdot1}=\dfrac{-2\pm\sqrt{16}}{2}=\dfrac{-2\pm4}{2}=$ $\boxed{1}$, $\boxed{-3}$

$\lim_{x\to1}\dfrac{2x^2+4x+2}{x^2+2x-3}=\dfrac{2+4+2}{0}=\dfrac{8}{0}=\infty$ $\boxed{x=1}$

$\lim_{x\to1^-}\dfrac{2x^2+4x+2}{x^2+2x-3}=\dfrac{8}{0^-}=-\infty$

0'9

$\lim_{x\to1^+}\dfrac{2x^2+4x+2}{x^2+2x-3}=\dfrac{8}{0^+}=+\infty$

1'1

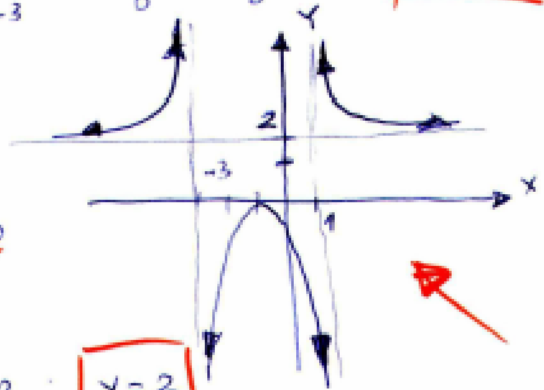
$\lim_{x\to-3}\dfrac{2x^2+4x+2}{x^2+2x-3}=\dfrac{2\cdot(-3)^2+4(-3)+2}{(-3)^2+2\cdot(-3)-3}=\dfrac{18-12+2}{0}=\dfrac{8}{0}=\infty$ $\boxed{x=-3}$

$\lim_{x\to-3^-}\dfrac{2x^2+4x+2}{x^2+2x-3}=\dfrac{8}{0^+}=+\infty$

-3'1

$\lim_{x\to-3^+}\dfrac{2x^2+4x+2}{x^2+2x-3}=\dfrac{8}{0^-}=-\infty$

-2'9



A.H.:

$\lim_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+4x+2}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{2x^2}{x^2}=2$; $\boxed{y=2}$

Δf: $\dfrac{2x^2+4x+2}{x^2+2x-3}-2=\dfrac{\cancel{2x^2}+\cancel{4x}+2-\cancel{2x^2}-\cancel{4x}+6}{x^2+2x-3}=\dfrac{8}{x^2+2x-3}$

$\lim_{x\to+\infty}\dfrac{8}{x^2+2x-3}=\dfrac{8}{+\infty}=0^+$; $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{8}{x^2+2x-3}=\dfrac{8}{-\infty}=0^-$